ΛΥΣΕΙΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Β. 1.Σ , 2. Λ , 3. Λ , 4.Λ , 5. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α.

Έστω M(x , y) τυχαία εικόνα του z.

$z = k + (k+1)i \Leftrightarrow x = k$ και $y = k + 1 \Leftrightarrow y = x + 1$

Οπότε, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$

Α. β.

$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (k+1)^2} = 1$

$k^2 + k^2 + 2k + 1 = 1$

$2k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ή $k = -1$

Άρα $z = 0 + 0i$ ή $z = -1 + 0i$

Β.

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1-i)^4\beta - (1+i)^4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 8 = [(1-i)^2]^2\beta - [(1+i)^2]^2\alpha$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1-2i-1)^2\beta - (1+2i-1)^2\alpha$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = 4i^2\beta - 4i^2\alpha$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = -4\beta + 4\alpha$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 - 4\alpha + 4\beta = 0$

$(\alpha-2)^2 + (\beta+2)^2 = 0$

$\alpha - 2 = 0$ και $\beta + 2 = 0$

$\alpha = 2$ και $\beta = -2$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$f'(x) = \dfrac{x + 1 - x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Πρόσημο της f΄ και μονοτονία της f

x	0		e		$+\infty$
f΄		+	0	−	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,\ e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e\,,\ +\infty)$

Παρουσιάζει δε μέγιστο για $x = e$ το $f(e) = \dfrac{e+1}{e}$

β.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$$

γ.

$$\int_1^{e^2} f(x)dx = \int_1^{e^2}\frac{x+\ln x}{x}dx = \int_1^{e^2} 1dx + \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx = (e^2-1) + \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx \quad \mathbf{(1)}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ θέτω $\ln x = u$, οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και

όταν $x = 1$ τότε $u = 0$

όταν $x = e^2$ τότε $u = 2$

Οπότε $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx = \int_0^2 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 2$

$(1) \Rightarrow \int_1^{e^2} f(x)dx = e^2 - 1 + 2 = e^2 + 1$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Είναι $f'(x) = \text{συν}x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

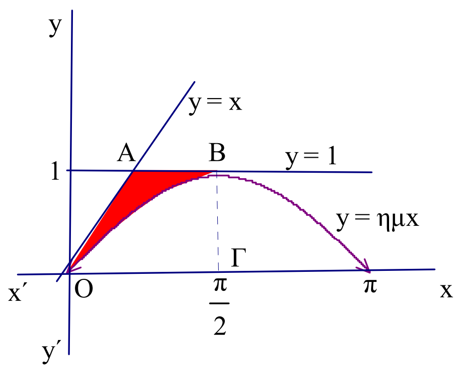
Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$

β.

Επειδή $f''(x) = -\text{ημ}x < 0$ για κάθε $x \in \left(0\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$, η f είναι κοίλη στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

άρα η εφαπτομένη $y = x$ είναι ψηλότερα από την C_f στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επίσης ισχύει ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.



Η περιοχή της οποίας ζητάμε το εμβαδόν φαίνεται στο διπλανό σχήμα (κόκκινη περιοχή)
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΑΒΓ μείον το εμβαδόν του χωρίου ΟΒΓ .
Οι συντεταγμένες των Α, Β προφανώς είναι $A(1\,,\,1)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\,,\ 1\right)$

Τότε $(AB) = \frac{\pi}{2} - 1$, $(O\Gamma) = \frac{\pi}{2}$ και $(B\Gamma) = 1$

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $\dfrac{(AB+O\Gamma)B\Gamma}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-1+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 1}{2} = \dfrac{\pi-1}{2}$

Επειδή $\eta\mu x \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, το εμβαδόν του χωρίου $OB\Gamma$ είναι

$(OB\Gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

$E_{\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o} = \dfrac{\pi-1}{2} - 1$ τετραγωνικές μονάδες

γ.

$\eta\mu x > x - \dfrac{3}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mu x - x + \dfrac{3}{2}x^2 > 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \dfrac{3}{2}x^2, \quad x \geq 0$

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + 3x$

και $g''(x) = -\eta\mu x + 3 > 0$

Συνεπώς η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x > 0$ θα είναι $g'(x) > g'(0) = 0$ άρα και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $g(x) > g(0) = 0$, δηλαδή

$$\eta\mu x - x + \frac{3}{2}x^2 > 0$$